第32講　関数総合(3)

1 [1]　0でない実数 x, y が関係式 $7^{\frac{1}{x}}=9$ および $63^{\frac{1}{y}}=3$ を満たしているとき $2x-y$ の値を求めよ.

[2]　(1)　$\dfrac{(\alpha+\beta)^3-(\alpha^3+\beta^3)}{\alpha+\beta}=\boxed{}\,\alpha\beta$ である. $\boxed{}$ にあてはまる数を答えよ.

(2)　$a=\sqrt[3]{48}+\sqrt[3]{36}$ のとき, $\dfrac{a^3-84}{a}$ の値を求めよ.

(3)　$b=\sqrt[3]{10+\sqrt{19}}+\sqrt[3]{10-\sqrt{19}}$ のとき, $\log_{81}\dfrac{b^3-20}{b}$ の値を求めよ.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［1］ a を定数とする．xy 平面上の曲線 $y=\log_2 x$ と直線 $y=x+a$ は2つの共有点をもつ．共有点の x 座標 x_1，x_2 が $x_2=4x_1$ を満たすように，a の値を定めよ．

［2］ a を2以上の定数とする．関数 $f(x)=4^x+4^{-x}-2a(2^x+2^{-x})$ について，次の問いに答えよ．

(1) $t=2^x+2^{-x}$ とおく．$t\geqq 2$ であることを示せ．

(2) $f(x)$ の最小値と，最小値をとるときの x の値を a で表せ．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　次の不等式を満たす $(x,\ y)$ の表す領域を図示せよ．

(1)　$\log_2(x+y)+\log_{\frac{1}{2}}(x-y)>1$

(2)　$a^{2x}-a^{2y}-a^{2x+y}+a^{x+2y}-a^x+a^y<0$　$(a>1)$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 32 講　関数総合(3)

[1]　$x=\log_{10}\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ のとき，$(10^x+10^{-x})(10^x-10^{-x})=$ **ア** $\sqrt{\text{イ}}$ である．

[2]　t の関数 $y=\dfrac{1}{4}(4^t+4^{-t})-\dfrac{a}{2}(2^t+2^{-t}-2)+\dfrac{1}{2}$　……①　について，$x=\dfrac{2^t+2^{-t}}{2}$ とおくとき，x の最小値は **ウ** であり，①は $y=x^2-$ **エ** $x+$ **オ** と変形できる．よって，y の最小値が 0 になるときの a の値は $a=$ **カ** である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 32 講　関数総合(3)

1 [1]　0 でない実数 x, y が関係式 $7^{\frac{1}{x}}=9$ および $63^{\frac{1}{y}}=3$ を満たしているとき $2x-y$ の値を求めよ.

$7^{\frac{1}{x}}=9$　より　$9^x=7$　　よって　$3^{2x}=7$

$63^{\frac{1}{y}}=3$　より　$3^y=63$

したがって　$3^{2x-y}=3^{2x}\cdot3^{-y}=\dfrac{3^{2x}}{3^y}=\dfrac{7}{63}=\dfrac{1}{9}=3^{-2}$

ゆえに　$2x-y=\mathbf{-2}$

1 [2]　(1)　$\dfrac{(\alpha+\beta)^3-(\alpha^3+\beta^3)}{\alpha+\beta}=\boxed{}\,\alpha\beta$ である. $\boxed{}$ にあてはまる数を答えよ.

(2)　$a=\sqrt[3]{48}+\sqrt[3]{36}$ のとき, $\dfrac{a^3-84}{a}$ の値を求めよ.

(3)　$b=\sqrt[3]{10+\sqrt{19}}+\sqrt[3]{10-\sqrt{19}}$ のとき, $\log_{81}\dfrac{b^3-20}{b}$ の値を求めよ.

(1)　$(\alpha+\beta)^3-(\alpha^3+\beta^3)=3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2=3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

よって　$\dfrac{(\alpha+\beta)^3-(\alpha^3+\beta^3)}{\alpha+\beta}=\dfrac{3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}=\mathbf{3}\alpha\beta$　……①

(2)　$\sqrt[3]{48}=\alpha$, $\sqrt[3]{36}=\beta$　とおくと　$a=\alpha+\beta$

また, $\alpha^3+\beta^3=48+36=84$

よって　$\dfrac{a^3-84}{a}=\dfrac{(\alpha+\beta)^3-(\alpha^3+\beta^3)}{\alpha+\beta}=3\alpha\beta=3\cdot\sqrt[3]{48}\cdot\sqrt[3]{36}$

$=3\cdot\sqrt[3]{12\cdot4\times12\cdot3}=3\cdot12=\mathbf{36}$

(3)　$\sqrt[3]{10+\sqrt{19}}=\alpha$, $\sqrt[3]{10-\sqrt{19}}=\beta$　とおくと　$b=\alpha+\beta$

また, $\alpha^3+\beta^3=10+\sqrt{19}+10-\sqrt{19}=20$

$\alpha\beta=\sqrt[3]{(10+\sqrt{19})(10-\sqrt{19})}=\sqrt[3]{100-19}=\sqrt[3]{81}=3\sqrt[3]{3}$

したがって　$\dfrac{b^3-20}{b}=\dfrac{(\alpha+\beta)^3-(\alpha^3+\beta^3)}{\alpha+\beta}=3\alpha\beta=9\sqrt[3]{3}$

よって　$\log_{81}\dfrac{b^3-20}{b}=\log_{81}9\sqrt[3]{3}=\dfrac{\log_3 9\sqrt[3]{3}}{\log_3 81}=\dfrac{2+\frac{1}{3}}{4}=\mathbf{\dfrac{7}{12}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［1］　a を定数とする．xy 平面上の曲線 $y=\log_2 x$ と直線 $y=x+a$ は 2 つの共有点をもつ．共有点の x 座標 x_1，x_2 が $x_2=4x_1$ を満たすように，a の値を定めよ．

$y=\log_2 x$ と $y=x+a$ の共有点の x 座標が x_1，x_2 であることより，x についての方程式 $\log_2 x=x+a$ の 2 解が x_1，x_2 である．

よって　$\log_2 x_1=x_1+a$，$\log_2 x_2=x_2+a$

この 2 式について辺々差をとると

$\log_2 x_1-\log_2 x_2=x_1-x_2$

$x_2=4x_1$ であることより

$\log_2 x_1-\log_2 4x_1=x_1-4x_1$

$\log_2\dfrac{x_1}{4x_1}=-3x_1$　　$-2=-3x_1$　　よって　$x_1=\dfrac{2}{3}$

したがって　$a=\log_2 x_1-x_1=\log_2\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}-\log_2 3}$

2 ［2］　a を 2 以上の定数とする．関数 $f(x)=4^x+4^{-x}-2a(2^x+2^{-x})$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$t=2^x+2^{-x}$ とおく．$t\geqq 2$ であることを示せ．

(2)　$f(x)$ の最小値と，最小値をとるときの x の値を a で表せ．

(1)　$2^x>0$，$2^{-x}>0$ より　(相加平均)$\geqq$(相乗平均) の関係から

$t=2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$

等号成立は　$2^x=2^{-x}$　　$x=-x$　よって　$x=0$ のとき

よって　$t\geqq 2$

(2)　$4^x+4^{-x}=(2^x)^2+(2^{-x})^2=(2^x+2^{-x})^2-2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2$

よって　$f(x)=t^2-2-2at=t^2-2at-2=(t-a)^2-a^2-2$

(1)より　$t\geqq 2$

また，$f(x)$ のグラフの軸は $t=a$ であり，$a\geqq 2$ より軸は変域内にある．

したがって $f(x)$ の最小値は　$-a^2-2$

また，$t=a$ のとき

$2^x+2^{-x}=a$　　$2^x+\dfrac{1}{2^x}=a$　　$(2^x)^2-a\cdot 2^x+1=0$

$2^x=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$

よって最小値をとる x の値は　$x=\boldsymbol{\log_2\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　次の不等式を満たす $(x,\ y)$ の表す領域を図示せよ．

(1)　$\log_2(x+y)+\log_{\frac{1}{2}}(x-y)>1$

(2)　$a^{2x}-a^{2y}-a^{2x+y}+a^{x+2y}-a^x+a^y<0\quad(a>1)$

(1)　真数条件より　$x+y>0$　かつ　$x-y>0$　　つまり　$-x<y<x$　……①

また，$\log_{\frac{1}{2}}(x-y)=\dfrac{\log_2(x-y)}{\log_2\frac{1}{2}}=-\log_2(x-y)$

よって与式は　$\log_2(x+y)-\log_2(x-y)>\log_2 2$

$\log_2(x+y)>\log_2 2+\log_2(x-y)$

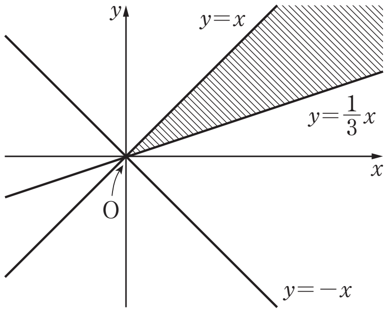
$\log_2(x+y)>\log_2 2(x-y)$

底 2 は 1 より大きいので

$x+y>2(x-y)$　　つまり　$y>\dfrac{1}{3}x$　……②

①と②の共通部分より，求める領域は

右図斜線部分（境界含まず）．



(2)　$a^{2x}-a^{2y}-a^{2x+y}+a^{x+2y}-a^x+a^y<0$

$(a^x)^2-(a^y)^2-(a^x)^2\cdot a^y+a^x\cdot(a^y)^2-a^x+a^y<0$

$a^x=X,\ a^y=Y$　とおくと　$X>0,\ Y>0$

$X^2-Y^2-X^2Y+XY^2-X+Y<0$

$(X+Y)(X-Y)-XY(X-Y)-(X-Y)<0$

$(X-Y)\{(X+Y)-XY-1\}<0$

$-(X-Y)(XY-X-Y+1)<0$

$(X-Y)(X-1)(Y-1)>0$　……①

①を満たすのは

(i)　$(X-Y)>0$　かつ　$(X-1)>0$　かつ　$(Y-1)>0$　　または

(ii)　$(X-Y)>0$　かつ　$(X-1)<0$　かつ　$(Y-1)<0$　　または

(iii)　$(X-Y)<0$　かつ　$(X-1)>0$　かつ　$(Y-1)<0$　　または

(iv)　$(X-Y)<0$　かつ　$(X-1)<0$　かつ　$(Y-1)>0$

のとき．

$X-Y>0$ のとき　$X>Y$　つまり　$a^x>a^y$　　$a>1$ より　$x>y$

$X-Y<0$ のとき　$x<y$

$X-1>0$ のとき　$a^x>1$　　$a^x>a^0$　　$a>1$ より　$x>0$

$X-1<0$ のとき　$x<0$

同様に　$Y-1>0$ のとき　$y>0$

$Y-1<0$ のとき　$y<0$

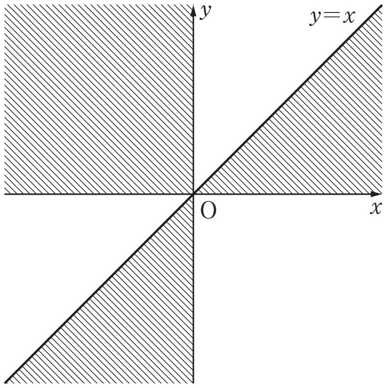
©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

以上より，求める領域は

(i) $\begin{cases} x>y \\ x>0 \\ y>0 \end{cases}$ または (ii) $\begin{cases} x>y \\ x<0 \\ y<0 \end{cases}$ または (iii) $\begin{cases} x<y \\ x>0 \\ y<0 \end{cases}$ または (iv) $\begin{cases} x<y \\ x<0 \\ y>0 \end{cases}$

を満たす部分．ただし(iii)を満たす領域はなし．
図示すると右図斜線部分（境界含まず）．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第32講　関数総合(3)

［1］ $x=\log_{10}\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ のとき，$(10^x+10^{-x})(10^x-10^{-x})=$ [ア] $\sqrt{\text{[イ]}}$ である.

［2］ t の関数 $y=\frac{1}{4}(4^t+4^{-t})-\frac{a}{2}(2^t+2^{-t}-2)+\frac{1}{2}$ ……① について，$x=\frac{2^t+2^{-t}}{2}$ とおくとき，x の最小値は [ウ] であり，①は $y=x^2-$ [エ] $x+$ [オ] と変形できる．よって，y の最小値が 0 になるときの a の値は $a=$ [カ] である.

解答例

［1］ $x=\log_{10}\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ より $10^x=\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

$(10^x)^2=7+4\sqrt{3}$ $\quad (10^{-x})^2=\frac{1}{7+4\sqrt{3}}=7-4\sqrt{3}$

よって $(10^x+10^{-x})(10^x-10^{-x})=(10^x)^2-(10^{-x})^2=7+4\sqrt{3}-(7-4\sqrt{3})=\mathbf{8\sqrt{3}}$

［2］ $2^t>0$，$2^{-t}>0$ より，相加平均と相乗平均の関係から

$x=\frac{1}{2}(2^t+2^{-t})\geqq\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2^t\cdot2^{-t}}=1$

等号成立は $2^t=2^{-t}$ より $t=0$ のとき　　よって $x\geqq1$ より x の最小値は $\mathbf{1}$

また，$x^2=\frac{1}{4}(2^t+2^{-t})^2=\frac{1}{4}(4^t+2+4^{-t})=\frac{1}{4}(4^t+4^{-t})+\frac{1}{2}$ より

$x^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(4^t+4^{-t})$

よって①は $y=\frac{1}{4}(4^t+4^{-t})-a\cdot\frac{2^t+2^{-t}}{2}+a+\frac{1}{2}=x^2-\frac{1}{2}-ax+a+\frac{1}{2}=x^2-\boldsymbol{a}x+\boldsymbol{a}$

と変形できる．$y=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+a$ $(x\geqq1)$ より

$\frac{a}{2}\leqq1$ つまり $a\leqq2$ のとき $x=1$ で最小値 1

$1\leqq\frac{a}{2}$ つまり $a\geqq2$ のとき $x=\frac{a}{2}$ で最小値 $-\frac{a^2}{4}+a$ をとる.

よって y の最小値が 0 になるとき $-\frac{a^2}{4}+a=0$

$a^2-4a=0$ $\quad a(a-4)=0$ $\quad a\geqq2$ より求める a の値は $a=\mathbf{4}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。